Repaso: límite de una función en un punto y en el infinito

Dado un número real a, recordemos que la expresión $\lim_{x\to a} f(x)$ representa el ***límite de la función*** $f(x)$ ***en el punto*** a y se lee "límite de $f(x)$ cuando x tiende al punto a". Para que exista $\lim_{x\to a} f(x)$ deben de existir los límites laterales por la izquierda y por la derecha y ser iguales. Es decir, si $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)=L$ (es importante tener en cuenta que L puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$).

Recordemos también que la expresión $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ representa el ***límite de la función*** $f(x)$ ***en el infinito*** y se lee "límite de $f(x)$ cuando x tiende a más o a menos infinito". Este límite puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$.

Si $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ diremos que la recta $x=a$ es una ***asíntota vertical*** (AV) de la función. Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=k$ diremos que la recta $y=k$ es una ***asíntota horizontal*** (AH) de la función. Diremos también que la recta $y=mx+n$ es una ***asíntota oblicua*** (AO) de la función si existen números reales m y n con $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=m$ y $\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)=n$.

Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ y $f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas, diremos que $f(x)$ presenta una ***rama infinita parabólica***.

Tanto las asíntotas horizontales, como las oblicuas y las ramas parabólicas son ramas infinitas en el infinito.

Todo esto lo veremos mucho mejor en la unidad 3, dedicada a la representación gráfica de funciones. De momento, basta con retener los conceptos y las notaciones expresadas anteriormente.

Límite en un punto en el que la función es continua

Ya sabemos del curso pasado que una función $f(x)$ es continua en un punto a si $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$. También sabemos que todas las funciones elementales conocidas (polinómicas, racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, así como las combinaciones o composición de estas) son continuas en sus respectivos dominios de definición. Por tanto, para calcular el límite en un punto de una función elemental dada por su expresión analítica bastará hallar la imagen de la función en ese punto. Por ejemplo, $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(3x-5)}{x+1}=\frac{\ln 1}{3}=\frac{0}{1}=0$. Es posible que la función no esté definida en el punto en el que vamos a hallar el límite, pero que tenga sentido hallarlo. Por ejemplo, $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(2x-1)=1$. Estos son casos de ***indeterminación*** y los analizaremos en las páginas siguientes.

Cálculo de límites de funciones definidas por trozos

Podemos considerar el caso general de la función $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x<a \\ h(x) & \text{si} \quad x\geq a\end{cases}$, donde g y h son funciones continuas en el punto a. Para calcular $\lim_{x\to a} f(x)$ debemos calcular los límites laterales en el punto a (llamado punto crítico). Es decir, hemos de calcular $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=h(a)$. En la práctica, si $g(a)=h(a)=L$, entonces existe el límite de f en a y es igual a L: $\lim_{x\to a} f(x)=L$. En caso contrario no existe el límite de f en el punto a (recordemos que L puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$).

En las próximas secciones profundizaremos en el cálculo de límites y en la continuidad de funciones definidas por trozos.

Reglas básicas para el cálculo de límites

- Si $k \in \mathbb{R}$, entonces $\begin{cases} k+\infty=+\infty+k=+\infty \\ k-\infty=-\infty+k=-\infty \end{cases}$.
- $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$, $(+\infty)-(-\infty)=+\infty$, $(-\infty)-(+\infty)=-\infty$.
- $\left.\begin{matrix} (+\infty)+(-\infty) \\ (-\infty)+(+\infty) \\ (+\infty)-(+\infty) \\ (-\infty)-(-\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ ***INDETERMINACIÓN*** $\infty-\infty$ (para calcular el límite debe transformarse la función).
- Si $k>0 \Rightarrow \begin{cases} k\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot k=+\infty \\ k\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot k=-\infty \end{cases}$. Si $k<0 \Rightarrow \begin{cases} k\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot k=-\infty \\ k\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot k=+\infty \end{cases}$.
- $0\cdot\infty \Rightarrow$ ***INDETERMINACIÓN*** (para calcular el límite debe transformarse la función).
- $(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$, $(+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$.
- Si $n\in\mathbb{N}$, n par, entonces $\begin{cases} (+\infty)^n=+\infty \\ (-\infty)^n=+\infty \end{cases}$. Si $n\in\mathbb{N}$, n impar, entonces $\begin{cases} (+\infty)^n=+\infty \\ (-\infty)^n=-\infty \end{cases}$.
- Si $n\in\mathbb{N}$, n par, entonces $\begin{cases} \sqrt[n]{+\infty}=+\infty \\ \sqrt[n]{-\infty} \text{ no existe} \end{cases}$. Si $n\in\mathbb{N}$, n impar, entonces $\begin{cases} \sqrt[n]{+\infty}=+\infty \\ \sqrt[n]{-\infty}=-\infty \end{cases}$.
- Si $k\in\mathbb{R}$, entonces $\frac{k}{\pm\infty}=0$, $\frac{0}{k}=0$ ($k\neq 0$), $\frac{0}{\pm\infty}=0$.
- Si $k>0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{+\infty}{k}=+\infty \\ \frac{-\infty}{k}=-\infty \end{cases}$. Si $k<0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{+\infty}{k}=-\infty \\ \frac{-\infty}{k}=+\infty \end{cases}$.
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \Rightarrow$ ***INDETERMINACIÓN*** (para calcular el límite debe transformarse la función).
- Si $k\neq 0$, entonces $\frac{k}{0}=\pm\infty$ (para conocer el signo del infinito se estudian los límites laterales).
- $\frac{0}{0} \Rightarrow$ ***INDETERMINACIÓN*** (para calcular el límite debe transformarse la función).
- Si $a\in\mathbb{R}$, $a>1$, entonces $\begin{cases} a^{+\infty}=+\infty \\ a^{-\infty}=0 \end{cases}$. Si $a\in\mathbb{R}$, $0<a<1$, entonces $\begin{cases} a^{+\infty}=0 \\ a^{-\infty}=+\infty \end{cases}$. $0^{+\infty}=0$; $0^{-\infty}=+\infty$.
- $(+\infty)^{+\infty}=+\infty$, $(+\infty)^{-\infty}=0$. Si $b<0$, entonces $(+\infty)^b=0$. Si $b>0$, entonces $(+\infty)^b=+\infty$.
- $(\pm\infty)^0$, 0^0, $1^{\pm\infty} \Rightarrow$ ***INDETERMINACIONES*** (para calcular el límite debe transformarse la función).

Resolución de indeterminaciones

La indeterminación “infinito partido por infinito”

1) Si la función es racional, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_o}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_o}$, se dividen todos los términos del numerador y del denominador entre la indeterminada x elevada al mayor de los grados, obteniendo las siguientes reglas elementales para el cálculo de límites:
   - Si $\text{grado}\,P(x)>\text{grado}\,Q(x)$, es decir, si $m>n$, entonces $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$. Para obtener el signo del infinito se hará el estudio de la regla de los signos en los términos de mayor grado: $\dfrac{a_mx^m}{b_nx^n}=\dfrac{a_m}{b_n}x^{m-n}$.
   - Si $\text{grado}\,P(x)<\text{grado}\,Q(x)$, es decir, si $m<n$, entonces $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.
   - Si $\text{grado}\,P(x)=\text{grado}\,Q(x)$, es decir, si $m=n$, entonces $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\dfrac{a_m}{b_n}$.

   Veamos algunos ejemplos:

   ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{-6x^2+5x-3}=-\infty$, porque el grado del polinomio de arriba es mayor que el grado del polinomio de abajo y, además, el cociente de los coeficientes líderes, $\dfrac{4}{-6}$, es negativo.

   ✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{-6x^2+5x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3}{-6x^2}=\left[\dfrac{+\cdot(-)^3}{-\cdot(-)^2}=\dfrac{+\cdot-}{-\cdot+}=\dfrac{-}{-}=+\right]=+\infty$.

   Ni que decir tiene que el límite anterior también puede finalizar así: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3}{-6x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{-3}=\dfrac{-\infty}{-3}=+\infty$.

   ✓ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3x^4-2x^3-3x-4}{2x^6-4x^2-5x+8}=0$, porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

   ✓ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{9x^3-2x^2+2x-1}{3x-3x^3+1}=\dfrac{9}{-3}=-3$, porque los grados son iguales: se dividen los coeficientes líderes.

2) Si la función contiene un radical se aplica la misma técnica comentada anteriormente: se dividen el numerador y el denominador entre la indeterminada x elevada al mayor de los grados. Hay que tener en cuenta que el “grado” de la expresión que contiene el radical es el grado del radicando entre el índice del radical. Por supuesto, el límite de la función que contiene el radical, debe de tener sentido. Veamos un ejemplo.

   ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{\sqrt{2x^4-x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2}}{\dfrac{\sqrt{2x^4-x+1}}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{2x^4-x+1}{x^4}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{3x^2}{x^2}-\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{2x^4}{x^4}-\dfrac{x}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}}}=$ **(*)**

   El mayor grado al que está elevada la indeterminada x es 2. Observa también que se ha introducido x^2 dentro del radical elevándolo al índice, en este caso al cuadrado: $(x^2)^2=x^4$.

   (*) $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{2-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}=\dfrac{3-0-0}{\sqrt{2-0+0}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

La indeterminación “cero partido por cero”

Esta indeterminación aparece cuando, en un cociente de funciones, tanto el numerador como el denominador tienden a cero. Si ambos son polinomios, se puede transformar la fracción algebraica en otra equivalente utilizando la regla de Ruffini. Si alguno de ellos, numerador o denominador, o ambos, no son polinomios (por ejemplo, cuando aparece un radical), es muy socorrido recurrir a la racionalización, es decir, a multiplicar y dividir por una misma raíz cuadrada o a “multiplicar y dividir por el conjugado”. Veamos algunos ejemplos.

✓ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}=\left[\text{INDETERMINACIÓN } \dfrac{0}{0}\right]=$ **(*)**

Factorizando el numerador y el denominador usando la regla de Ruffini tenemos:

(*) $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2(x+3)}{(x-2)^3(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{(x-2)(x-1)}=\left[\dfrac{5}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si } x\to 2^-\\ +\infty & \text{si } x\to 2^+\end{cases}$.

De lo anterior se deduce que $x=2$ es una asíntota vertical de la función $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}$.

✓ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\left[\text{INDET } \dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2-2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

✓ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-x}{\sqrt{x-1}}=\left[\text{INDET } \dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{2x-1}-x\right)\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1-x^2}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}=$ **(*)**

El último límite vuelve a presentar la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{x-1}$:

(*) $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2x-1-x^2\right)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2x-1-x^2\right)\sqrt{x-1}}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}=$ **(**)**

Vuelve a aparecer la indeterminación $\dfrac{0}{0}$, pero observemos que ahora hay un polinomio en el numerador y otro en el denominador, con lo cual podemos aplicar la técnica vista anteriormente:

(**) $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(-x+1)\sqrt{x-1}}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(-x+1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}+x}=\dfrac{0}{2}=0$.

✓ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}=\left[\text{INDET } \dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h\left(3x^2+3xh+h^2\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)=3x^2$.

Obsérvese que, en este último límite aparecen dos letras. La variable que ahora “se mueve” no es x, sino h. Por eso hemos resuelto la indeterminación desarrollando el paréntesis, sacando h factor común, simplificando y sustituyendo finalmente h por 0.

La indeterminación "infinito menos infinito"

En la mayoría de los casos se resuelve haciendo las operaciones indicadas, es decir, transformando la función en otra equivalente.

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{2x-3}-\dfrac{x^3-3}{2x^2}\right)=\left[(-\infty)-(-\infty)\right]$. Estamos ante una indeterminación del tipo $\infty-\infty$. Para resolverla transformamos la función. En este caso hacemos la resta.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{2x-3}-\frac{x^3-3}{2x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2\cdot\left(x^2-x+1\right)-(2x-3)\cdot\left(x^3-3\right)}{(2x-3)\cdot 2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2x^4-2x^3+2x^2\right)-\left(2x^4-6x-3x^3+9\right)}{4x^3-6x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2+6x-9}{4x^3-6x^2}=\frac{1}{4}.$$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\left[(+\infty)-(+\infty)\right]$. Otra vez estamos ante la indeterminación $\infty-\infty$. Cuando el límite involucra raíces cuadradas recurrimos a la técnica "multiplicar y dividir por el conjugado", comentada en el apartado anterior.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{2}{1+1}=1.$$

Obsérvese que el último límite se ha hecho usando la técnica comentada en el primer apartado.

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-x^2\right)=\left[(+\infty)-(+\infty)=\infty-\infty\right]$. Volvamos a multiplicar y a dividir por el conjugado:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x\sqrt{x^2+1}-x^2\right)\left(x\sqrt{x^2+1}+x^2\right)}{x\sqrt{x^2+1}+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(x^2+1\right)-x^4}{x\sqrt{x^2+1}+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2+1}+x^2}=$$

Es conveniente introducir la x dentro del radical antes de dividir todos los términos entre x^2.

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^4+x^2}+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Este límite también se podría haber hecho así:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Por cierto, de lo anterior deducimos que $y=\dfrac{1}{2}$ es una asíntota horizontal de $f(x)=x\sqrt{x^2+1}-x^2$.

✓ $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{x}{1-x^2}\right)=\left[\dfrac{2}{0}-\dfrac{1}{0}=\infty-\infty\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(1+x)-x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{1-x^2}=\left[\dfrac{3}{0}\right]=\begin{cases}+\infty & \text{si } x\to1^-\\-\infty & \text{si } x\to1^+\end{cases}.$

La indeterminación “cero por infinito”

Al igual que en el caso anterior, se resuelve transformando la función en otra función equivalente. Esto se consigue haciendo las operaciones indicadas. Normalmente llegaremos a otra función que, al calcular el límite, presente alguna de las indeterminaciones anteriores. Veamos algunos ejemplos de este último caso.

- ✓ $$\lim_{x\to 2}\left[(x-2)\cdot\frac{x}{\sqrt{x+7}-3}\right]=[\text{INDET } 0\cdot\infty]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)x}{\sqrt{x+7}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{\sqrt{x+7}-3}=\left[\text{INDET } \frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-2x)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-2x)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x+7-9}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x-2}=$$
$$=\lim_{x\to 2}x\left(\sqrt{x+7}+3\right)=2\cdot\left(\sqrt{9}+3\right)=2\cdot 6=12\,.$$

- ✓ $$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}}-2\right)=[\text{INDET } 0\cdot\infty]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4-\frac{1}{x}\right)}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)=[\text{INDET } \infty-\infty]=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-x}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-x-4x^2}{\sqrt{4x^2-x}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{4x^2-x}+2x}=\frac{-1}{\sqrt{4}+2}=\frac{-1}{2+2}=-\frac{1}{4}\,.$$
  Llegados a este punto es conveniente hacer una observación: podríamos haber hallado este último límite dividiendo todos los términos entre x (así se ha hecho en casos anteriores).

La indeterminación “uno elevado a infinito”

Partiremos del siguiente resultado: $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, donde e es un número irracional aproximadamente igual a $2,71828$. Hay un resultado más general aún: si $f(x)\to\pm\infty\Rightarrow\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}\to e$. Si en esta última expresión hacemos $h(x)=\frac{1}{f(x)}$ entonces, como $f(x)\to\pm\infty$, tenemos que $h(x)\to 0$, con lo que obtenemos el siguiente resultado equivalente: $h(x)\to 0\Rightarrow\left(1+h(x)\right)^{\frac{1}{h(x)}}\to e$, que lo vamos a llamar ***resultado 1***.

Supongamos ahora que deseamos estudiar el carácter de la función $f(x)^{g(x)}$ suponiendo que $f(x)\to 1$ y que $g(x)\to\pm\infty$, es decir, deseamos resolver en general la indeterminación 1^∞. La idea es obtener otra expresión equivalente a $f(x)^{g(x)}$ de tal manera que la indeterminación del tipo 1^∞ se convierta en otra del tipo $0\cdot\infty$. Para ello vamos a hacer un “truco”: $f(x)^{g(x)}=\left(1+\left(f(x)-1\right)\right)^{g(x)}=\left[\left(1+\left(f(x)-1\right)\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)\cdot\left(f(x)-1\right)}$. Como $f(x)\to 1$, entonces $\left(f(x)-1\right)\to 0$, y por ***el resultado 1*** tenemos que $\left(1+\left(f(x)-1\right)\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\to e$. De este modo, estamos en condiciones de afirmar que las tres siguientes implicaciones son ciertas:

$g(x)\cdot\left(f(x)-1\right)\to L\Rightarrow f(x)^{g(x)}\to e^L$, $g(x)\cdot\left(f(x)-1\right)\to+\infty\Rightarrow f(x)^{g(x)}\to e^{+\infty}=+\infty$,

$g(x)\cdot\left(f(x)-1\right)\to-\infty\Rightarrow f(x)^{g(x)}\to e^{-\infty}=0$. Veamos algunos casos prácticos de esta indeterminación.

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{x-3}=\left[\text{INDET } 1^{+\infty}\right]$. Llamemos $f(x)=\dfrac{2x+1}{2x}$ y $g(x)=x-3$. Entonces:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)\left(f(x)-1\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-3)\left(\dfrac{2x+1}{2x}-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-3)\left(\dfrac{2x+1-2x}{2x}\right)\right]=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-3)\left(\dfrac{1}{2x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3}{2x}=\dfrac{1}{2}$. Por tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{x-3}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x+3}{3-x^2}\right)^{-x}=\left[\text{INDET } 1^{-\infty}\right]$. Llamemos $f(x)=1-\dfrac{x+3}{3-x^2}$ y $g(x)=-x$. Entonces:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)\left(f(x)-1\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x\left(1-\dfrac{x+3}{3-x^2}-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x\left(-\dfrac{x+3}{3-x^2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x}{3-x^2}=-1$.

Por tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x+3}{3-x^2}\right)^{-x}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

✓ $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}=[\text{INDET } 1^{\infty}]$. Llamemos $f(x)=\cos x$ y $g(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$. Entonces:

$\lim\limits_{x\to0}\left(g(x)\left(f(x)-1\right)\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot(\cos x-1)\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x}=\left[\text{INDET } \dfrac{0}{0}\right]$. El único recurso conocido para resolver esta última indeterminación es multiplicar y dividir por el conjugado de $\cos x-1$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{\operatorname{sen} x(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{\operatorname{sen} x(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x+1}=\frac{0}{2}=0$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}=e^0=1$.

✓ $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{4x-5}{x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{(x-2)^2}}=\left[\text{INDET } 1^{+\infty}\right]$. Llamemos $f(x)=\dfrac{4x-5}{x+1}$ y $g(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-2)^2}$. Entonces:

$$\lim_{x\to2}\left(g(x)\left(f(x)-1\right)\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2-1}{(x-2)^2}\left(\frac{4x-5}{x+1}-1\right)\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2-1}{(x-2)^2}\cdot\frac{3x-6}{x+1}\right)=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)(x-1)3(x-2)}{(x-2)^2(x+1)}=$$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3(x-1)}{x-2}=\begin{cases}-\infty & \text{si } x\to2^-\\ +\infty & \text{si } x\to2^+\end{cases}$. Por tanto $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{4x-5}{x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{(x-2)^2}}=\begin{cases}e^{-\infty}=0 & \text{si } x\to2^-\\ e^{+\infty}=+\infty & \text{si } x\to2^+\end{cases}$.

La resolución de la indeterminación 1^{∞} sirve en ocasiones para resolver otro tipo de indeterminaciones.

✓ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(3x-2)}{x-1}=\left[\text{INDET } \dfrac{0}{0}\right]$. Pero resulta que $\dfrac{\ln(3x-2)}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}\cdot\ln(3x-2)=\ln(3x-2)^{\frac{1}{x-1}}$. Por tanto, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(3x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(\ln(3x-2)^{\frac{1}{x-1}}\right)=\ln\left(\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\frac{1}{x-1}}\right)$. En el último paso hemos intercambiado el logaritmo con el límite porque el logaritmo es una función continua. Llamemos ahora $f(x)=3x-2$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$. Entonces: $\lim\limits_{x\to1}\left[g(x)\cdot\left(f(x)-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{1}{x-1}(3x-2-1)\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-3}{x-1}=3$. De aquí se obtiene que $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\frac{1}{x-1}}=e^3$. Finalmente, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(3x-2)}{x-1}=\ln\left(\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\frac{1}{x-1}}\right)=\ln e^3=3\ln e=3\cdot1=3$.

Comparación de infinitos

A veces es muy útil para el cálculo de límites, tanto en un punto como en el infinito, comparar el carácter de distintas funciones elementales conocidas con el objetivo de que el cálculo de límite sea más fácil de hacer. Normalmente, si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\pm\infty$, se dice que $f(x)$ es un ***infinito de orden superior*** a $g(x)$ si $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ o, lo que es lo mismo, si $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=0$. El siguiente resultado es de gran utilidad:

> Sean $a\in\mathbb{R}^+$ y $f,\ g,\ h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ las siguientes funciones: $f(x)=\frac{\ln x}{x^a}$, $g(x)=\frac{x^a}{e^x}$, $h(x)=\frac{e^x}{x^x}$.
>
> Entonces se tiene que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$

Obsérvese que en el resultado anterior se ha tomado $\mathbb{R}^+$ como el conjunto donde el exponente a de la función potencial x^a toma valores (esto quiere decir que x^a puede ser una raíz, o algo tan aparentemente extraño como $x^{\sqrt{2}}$ o x^π). También se ha tomado $\mathbb{R}^+$ como el conjunto de definición de cada una de las funciones anteriores, precisamente para que las funciones $\ln x$ y x^x tengan sentido (recuerda que el dominio de definición del logaritmo es $\mathbb{R}^+$ y que si una función tiene la variable en el exponente, trabajaremos con funciones cuya base sea mayor que cero). Obsérvese también que cada uno de los límites anteriores es, en principio, una indeterminación del tipo “infinito partido por infinito”.

Pues bien, la proposición anterior viene a decir que la función x^x es un infinito de orden superior que la función exponencial e^x (podríamos haber tomado cualquier otra función exponencial k^x con $k>1$), que la función exponencial e^x es un infinito de orden superior que la función potencial x^a, y que la función potencial x^a es un infinito de orden superior que la función logarítmica $\ln x$. Dicho de otra manera, si $x\to+\infty$, la función que “más rápido crece” es la función x^x, seguida de la función exponencial e^x (o k^x con $k>1$), luego de la función potencial x^a y seguida por último de la función logarítmica $\ln x$. Son útiles las siguientes reglas:

- Dadas dos potencias de x (y aquí entran expresiones del tipo $x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}$), la de mayor exponente es un infinito de orden superior. Por ejemplo, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x^4}}{3x}=0$.
- Dadas dos funciones exponenciales de bases mayores que 1, la de mayor base es un infinito de orden superior. Por ejemplo, $\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{5\cdot 2^x}=+\infty$.
- Cualquier función exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior que cualquier función potencial. Por ejemplo, $\lim_{x\to+\infty}\frac{(1,2)^x}{9x^{25}}=+\infty$.
- Tanto las funciones exponenciales de base mayor que 1, como las funciones potenciales son infinitos de orden superior que cualquier función logarítmica.
- Dos polinomios del mismo grado o dos potencias de la misma base son infinitos del mismo orden. Para calcular el límite deberemos transformar la función: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x+3}}{4^{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^3\cdot(2^2)^x}{4^{-1}\cdot 4^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^3\cdot 4^x}{4^{-1}\cdot 4^x}=\frac{8}{4^{-1}}=32$.
- Si en una suma o resta hay varios infinitos, el orden de la suma o resta es el del sumando de mayor orden. Por ejemplo, $\lim_{x\to+\infty}\left(2^x-x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}2^x=+\infty$.

Infinitésimos equivalentes

Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se denominan ***equivalentes*** en $x=a$, si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. Si además se cumple que $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$, se dice que $f(x)$ y $g(x)$ son ***infinitésimos equivalentes***. En estos casos se escribe $f(x)\sim g(x)$ cuando x tiende a a. El siguiente listado de infinitésimos equivalentes puede ser utilizado en el cálculo de límites.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1\Rightarrow \operatorname{sen} x\sim x\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1\Rightarrow \operatorname{tg} x\sim x\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}=1\Rightarrow \operatorname{arcsen} x\sim x\ ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1\Rightarrow \operatorname{arctg} x\sim x\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}=1\Rightarrow 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{kx}=1\Rightarrow (1+x)^k-1\sim kx\ ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\Rightarrow e^x-1\sim x\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x\ln b}=1\Rightarrow b^x-1\sim x\ln b\ ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\Rightarrow \ln(1+x)\sim x\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_b(1+x)}{x}=1\Rightarrow \log_b(1+x)\sim x\log_b e$$

En general, en el listado anterior, se puede sustituir x por una función $h(x)$, siempre que $h(x)\to 0$.

Veamos algunos ejemplos.

✓ $\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(x^2-1)}{x-1}$. Si $x\to 1$, $x^2-1\to 0$. Entonces, si $x\to 1$, se tiene que $\operatorname{tg}(x^2-1)\sim x^2-1$. Por tanto:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

✓ $\lim_{x\to 1}\frac{2^{x-1}-1}{x-1}$. Al igual que el ejemplo anterior, cuando $x\to 1$, $x-1\to 0$, es decir, si $x\to 1$ tenemos en este caso que $2^{x-1}-1\sim(x-1)\ln 2$. Por tanto:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2^{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\ln 2}{x-1}=\ln 2.$$

✓ $\lim_{x\to 1/2}\frac{\ln(4x-1)}{2x-1}$. En este caso, cuando $x\to 1/2$, $x-1/2\to 0$ y también $4x-2\to 0$. Por tanto, si $x\to 1/2$ tenemos que $\ln(4x-1)=\ln(1+4x-2)\sim 4x-2$. Entonces:

$$\lim_{x\to 1/2}\frac{\ln(4x-1)}{2x-1}=\lim_{x\to 1/2}\frac{4x-2}{2x-1}=\lim_{x\to 1/2}\frac{2(2x-1)}{2x-1}=2.$$

✓ $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2+2x-3}$. Por un proceso anteriormente repetido, como $x\to 1$, entonces $x-1\to 0$, es decir, si $x\to 1$ tenemos que $\ln x=\ln(1+x-1)\sim x-1$. Por tanto:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}.$$

Las indeterminaciones "infinito elevado a cero" y "cero elevado a cero"

Para resolver este tipo de indeterminaciones tendremos que hacer uso de las propiedades de los logaritmos. En general tendremos una función del tipo $f(x)^{g(x)}$, donde $f(x)$ tiende a infinito o a cero y $g(x)$ tiende a cero. Vamos a llamar $y=f(x)^{g(x)}$ y vamos a tomar logaritmos neperianos en ambos miembros de la igualdad:

$$y=f(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \ln y=\ln f(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \ln y=g(x)\ln f(x)$$

Entonces, por definición de logaritmo tenemos que $y=e^{g(x)\ln f(x)}$. Pero como $y=f(x)^{g(x)}$, nos queda:

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

La fórmula anterior permite transformar las indeterminaciones ∞^0 y 0^0 en otras ya explicadas anteriormente. Veamos algunos ejemplos prácticos.

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=\left[\text{INDET} \quad +\infty^0\right]$. Si tomamos $f(x)=x$ y $g(x)=\frac{1}{x}$, por la fórmula vista anteriormente tenemos que $x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$. Y como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ (la función potencial es un infinito de orden superior que la función logarítmica), tenemos finalmente que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^0=1$.

✓ $\lim\limits_{x\to0^+} x^x=\left[\text{INDET} \quad 0^0\right]$. En este caso, si tomamos $f(x)=x$ y $g(x)=x$, tenemos que $x^x=e^{x\ln x}$. Sin embargo, el límite $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)$ (que se trata de una indeterminación del tipo $0\cdot\infty$), no es fácil de resolver (lo podremos calcular usando un potente resultado, denominado "regla de L'Hôpital", que veremos en la próxima sección). Lo que vamos a hacer para calcular el límite inicial es escribir la función x^x de otra forma: $x^x=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^x}$. Ahora vamos a hacer un cambio de variable (que también es una buena opción en el cálculo de límites). Llamaremos $y=\frac{1}{x}$. Entonces $x^x=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{1}{y^{\frac{1}{y}}}$. Además, cuando $x\to0^+$ claramente $y=\frac{1}{x}\to+\infty$. Entonces, por el límite calculado en el ejemplo anterior, tenemos que $\lim\limits_{y\to+\infty} y^{\frac{1}{y}}=1$. Por tanto: $\lim\limits_{x\to0^+} x^x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{y^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{1}=1$.

Hemos de insistir en que muchos de los límites en los que aparecen las indeterminaciones del tipo ∞^0 y 0^0 se resuelven usando la fórmula $\lim\limits_{x\to0} f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to0} e^{g(x)\ln f(x)}$. Esto transforma la indeterminación correspondiente en otra del tipo $0\cdot\infty$, que aparece al calcular el límite $\lim\limits_{x\to0}\left(g(x)\ln f(x)\right)$. Para calcular este último límite haremos uso, con cierto ingenio, de la regla de L'Hôpital, la cual se enuncia en la siguiente sección. De hecho, ***la regla de L'Hôpital permitirá calcular también ciertos límites sin necesidad de recurrir a la comparación de infinitos o a los infinitésimos equivalentes***.

La regla de L'Hôpital

Para hacer uso de la regla de L'Hôpital en el cálculo de límites hemos de saber derivar funciones a un cierto nivel. Por eso es necesario repasar las tablas de derivadas de las funciones elementales y las reglas de derivación que se vieron en el primer curso de bachillerato. Dicho esto, enunciemos la regla de L'Hôpital.

- Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ y supongamos también que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe. Entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ también existe y $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Esto resuelve la indeterminación $\dfrac{0}{0}$.
- Igualmente, si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ también existe y $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Esto resuelve la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Muy importante: en ambos casos a puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$.

Veamos algunos ejemplos de cálculo de límites usando la regla de L'Hôpital. A veces hay que aplicarla más de una vez para llegar a calcular el límite que se pide.

✓ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}=\left[\text{INDET } \dfrac{0}{0}\to \text{L'Hôpital}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x=1$.

✓ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{x^2}=\left[\text{INDET } \dfrac{0}{0}\to \text{L'Hôpital}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x(-\operatorname{sen} x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x\operatorname{sen} x}{x}=$

$=\left[\text{INDET } \dfrac{0}{0}\to \text{L'Hôpital}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{1}=\dfrac{-1}{1}=-1$.

✓ $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}=\left[\text{INDET } \ +\infty^0\right]$. Este límite ya lo habíamos hecho en la página anterior. Se tiene: $x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$. Pero ahora $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}\ln x=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left[\text{INDET } \dfrac{+\infty}{+\infty}\to \text{L'Hôpital}\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Y llegamos a la misma conclusión que antes: $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^0=1$.

✓ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=\left[\text{INDET } \ 0^0\right]$. En la página anterior se hizo usando un cambio de variable. Pero ahora lo haremos aplicando la regla de L'Hôpital. Puesto que $x^x=e^{x\ln x}$, entonces:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\left[\text{INDET } \ 0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\text{INDET } \frac{\infty}{\infty}\to \text{L'Hôpital}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

Por tanto, finalmente $\lim\limits_{x\to +\infty} x^x=\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x\ln x}=e^0=1$.

✓ $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x}=\left[\text{INDET } \ 0\cdot\infty\right]=\lim\limits_{x\to +\infty} x\dfrac{1}{e^x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{e^x}=\left[\text{INDET } \dfrac{\infty}{\infty}\to \text{L'Hôpital}\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{1}{+\infty}=0$.

✓ $$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\left[\text{INDET }\frac{0}{0}\to\text{L'Hôpital}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\operatorname{sen}x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\operatorname{sen}x}{3x^2}=$$
$$=\left[\text{INDET }\frac{0}{0}\to\text{L'Hôpital}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x-x\cos x}{6x}=\left[\text{INDET }\frac{0}{0}\to\text{L'Hôpital}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-\cos x+x\operatorname{sen}x}{6}=\frac{-1-1+0}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}.$$

✓ $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-4x}}{\ln(1+2x)}=\left[\text{INDET }\frac{0}{0}\to\text{L'Hôpital}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+4e^{-4x}}{\frac{2}{1+2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(e^{2x}+2e^{-4x}\right)(1+2x)}{2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(e^{2x}+2e^{-4x}\right)(1+2x)=(1+2)(1+0)=3.$$

✓ $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\ln\left(\cos x^2+x\right)}=\left[\text{INDET }\frac{0}{0}\to\text{L'Hôpital}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}2x}{\frac{-2x\operatorname{sen}x^2+1}{\cos x^2+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}2x\left(\cos x^2+x\right)}{-2x\operatorname{sen}x^2+1}=\frac{0}{0+1}=0.$$

✓ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{2}{\ln x}}=\left[\text{INDET }0^0\right]$. Haciendo uso de la igualdad $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$, tenemos que

$\displaystyle\left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{2}{\ln x}}=e^{\frac{2}{\ln x}\ln\left(\frac{2}{x+1}\right)}=e^{\frac{2(\ln 2-\ln(x+1))}{\ln x}}$. Calculemos ahora el límite cuando $x\to+\infty$ del exponente.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\ln 2-\ln(x+1)\right)}{\ln x}=\left[\text{INDET }\frac{\infty}{\infty}\to\text{L'Hôpital}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(0-\frac{1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x+1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+1}=-2.$$

Por tanto, finalmente, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{2}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{2(\ln 2-\ln(x+1))}{\ln x}}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$.

En general podemos transformar cualquier indeterminación en otra de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y así poder hacerla resoluble usando la regla de L'Hôpital.

a) $\infty-\infty$ se puede transformar en $\frac{0}{0}$ usando la igualdad $f(x)-g(x)=\dfrac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$.

b) $0\cdot\infty$ se puede transformar bien en $\frac{0}{0}$ a partir de la igualdad $f(x)g(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, o bien en $\frac{\infty}{\infty}$ a partir de la igualdad $f(x)g(x)=\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$.

c) ∞^0, 0^0, 1^∞ se pueden transformar en indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty$, tomando logaritmos neperianos, es decir, haciendo uso de la igualdad $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$.

Continuidad de una función en un punto

Una función f es ***continua*** en un punto $x=a$ si se cumple la siguiente igualdad: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Es muy importante darse cuenta de que la igualdad anterior encierra **tres claves** para que sea cierta.

Clave 1) Debe existir la imagen de f en a, es decir, $a\in \operatorname{Dom} f$, con lo que $f(a)$ es un número real. Por tanto, si $a\notin \operatorname{Dom} f$, la función f no es continua en $x=a$.

Clave 2) Existe el límite de la función cuando x tiende o se acerca al punto a y es finito, es decir, este límite es un número real que podemos llamar L. Recordemos que para que exista tal límite deben existir los límites laterales y ser iguales. Si el límite no existe o es $\pm\infty$, entonces f no es continua en $x=a$.

Clave 3) Los números cuya existencia se afirma en los dos apartados anteriores son iguales: $\lim_{x\to a} f(x)=L=f(a)$.

Todas las funciones elementales (polinómicas, racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas) son continuas en sus respectivos dominios de definición. Veamos ejemplos de no continuidad en algunos puntos.

a) La función $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-2}$ es una función racional cuyo dominio de definición es $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}-\{2\}$. Por tanto, f es continua en todo su dominio. ¿Qué ocurre en $x=2$? Según la clave número 1), como no existe $f(2)$, f no es continua en $x=2$. Además, $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x-2}=\begin{cases}-\infty & \text{si } x\to 2^-\\ +\infty & \text{si } x\to 2^+\end{cases}$. Por tanto, como no es finito el límite cuando $x\to 2$, tampoco se cumple la clave número 2). En este caso la función presenta una rama infinita cuando $x\to 2$ y la recta vertical $x=2$ es una asíntota vertical.

b) La función $f(x)=\dfrac{2x^2-8}{x-2}$ también es una función racional cuyo dominio de definición es, al igual que en el ejemplo anterior, $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}-\{2\}$. Por tanto, al no cumplirse la clave número 1), tampoco es continua en $x=2$. Sin embargo, sí que existe y es finito el límite de la función cuando x tiende a 2:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x-2}=\left[\text{INDET }\ \frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{2(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(2(x+2)\right)=8$$

Aunque f no es continua en $x=2$, en este caso la función no presenta ramas infinitas cuando $x\to 2$, ya que el límite existe y es finito. Lo que le ocurre a la gráfica de f es que en $x=2$ presenta un "huequecito".

c) La función $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si } x<2\\ -x^2+x & \text{si } x\geq 2\end{cases}$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y es claramente continua en todo punto a la izquierda y a la derecha de $x=2$. Además, $f(2)=-2$. Sin embargo, $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-1)=3$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(-x^2+x)=-2$. Como los límites laterales no son iguales, no existe el límite cuando $x\to 2$ de la función f y, por tanto, f no es continua en $x=2$.

d) En la función $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si } x<2\\ 1 & \text{si } x=2\\ 2x-1 & \text{si } x>2\end{cases}$ ocurre que $\begin{cases}\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-1)=3\\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(2x-1)=3\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=3$. Sin embargo, $f(2)=1$. Entonces $\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$ y, por tanto, f no es continua en $x=2$.

Tipos de discontinuidades

Hemos visto en la sección anterior distintos motivos por los que una función f no es continua en un punto $x=a$. En el ejemplo a) no se cumplía ni la clave 1) ni la clave 2). En el ejemplo b) no se cumplía la clave 1), aunque sí la clave número 2). En el ejemplo 3) sí que se cumple la clave número 1), pero no la clave 2). Y en el ejemplo d) se cumplen tanto la clave 1) como la clave 2), pero no se cumple la clave número 3).

Estas alternativas darán lugar a distintos tipos de discontinuidades, según no se cumpla una clave u otra. La clasificación de discontinuidades puede ser larga y exhaustiva, pero a un nivel de Bachillerato vamos a hacerlo relativamente sencillo. En primer lugar, vamos a suponer de entrada que, dado un punto $x=a$, existe $f(a)$. Es decir, que $a\in \operatorname{Dom} f$. Si a no pertenece al dominio de la función simplemente diremos que f no es continua en $x=a$ (es lo que ocurría en los ejemplos a) y b) de la página anterior). Piénsese que no tendría mucho sentido de hablar de la continuidad de una función en un punto donde no está definida. Dicho esto, y a partir de aquí, vamos a distinguir entre discontinuidades evitables y no evitables. Y dentro de las segundas, haremos también un par de distinciones.

Discontinuidades evitables

Esta discontinuidad se presenta cuando existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y es finito (lo que presupone que han de existir los límites laterales y ser iguales), pero su valor es distinto de $f(a)$. Es el caso del ejemplo d) anterior.

Obsérvese que en este tipo de discontinuidades se cumplen las claves 1) y 2), pero no la número 3). Por cierto, si no existiera $f(a)$ pero sí el límite cuando $x\to a$ la discontinuidad se seguiría llamando evitable. Es el caso del ejemplo b).

La discontinuidad evitable se caracteriza porque la gráfica de la función presenta un “hueco” en el punto $x=a$.

Discontinuidades no evitables

Distinguiremos, básicamente, dos tipos de discontinuidades no evitables, la de salto finito y la de salto infinito.

Discontinuidad de salto finito

Esta discontinuidad se presenta cuando los dos límites laterales en el punto a existen y son finitos, pero no coinciden. Por tanto, no existirá el límite cuando $x\to a$ y la función no será continua en $x=a$. Es el caso del ejemplo c).

Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_1\neq L_2=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, se denomina longitud del salto a la cantidad $|L_1-L_2|$.

Discontinuidad de salto infinito

Esta discontinuidad se presenta cuando al menos uno de los dos límites laterales es infinito. En estos casos la función presenta en $x=a$ una asíntota vertical y la discontinuidad también suele llamarse asintótica. Las discontinuidades de salto infinito entran dentro de un grupo de discontinuidades también llamadas esenciales. Es el caso del ejemplo a). De todas formas, veamos otro ejemplo de esta discontinuidad en una función definida por trozos.

Sea por ejemplo la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{si} \quad x<2 \\ x+2 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$

Estudiemos los límites laterales en $x=2$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x}{x-2}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} (x+2)=4 \end{cases}$.

Como uno de los límites laterales es infinito, f presenta una discontinuidad de salto infinito en $x=2$. Además, la recta $x=2$ es una asíntota vertical (f tiene una rama infinita en $x=2$).

Continuidad de una función en un intervalo

Una función es continua en un intervalo de números reales si es continua en todos y cada uno de los puntos de dicho intervalo. Ya se ha comentado que todas las funciones elementales usadas habitualmente son continuas en sus respectivos dominios de definición y, por tanto, en los intervalos o unión de intervalos en los que esté definida. La combinación o composición de funciones elementales también da lugar a funciones continuas. Veamos algunos ejemplos:

- ✓ $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x}$. Tenemos que $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}-\{0,\,2\}$. Por tanto, f es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en los puntos $x=0$ y $x=2$ (en estos puntos habría que estudiar los límites laterales para ver el tipo de discontinuidad). De hecho, f tiene dos asíntotas verticales: las rectas $x=0$ (el eje Y) y $x=2$. También podemos decir que f es continua en $(-\infty,\,0)\cup(0,\,2)\cup(2,\,+\infty)$.
- ✓ $f(x)=\ln(2x-3)$. Sabemos que el logaritmo solamente está definido para valores mayores que cero. Por tanto, esta función solamente tendrá sentido cuando $2x-3>0$, o lo que es lo mismo, cuando $x>\dfrac{3}{2}$. De este modo se tiene que $\operatorname{Dom} f=\left(\dfrac{3}{2},\,+\infty\right)$, y en este intervalo la función es continua.
- ✓ $f(x)=\begin{cases}-x^2+x & \text{si} \quad x<-1\\ 2x+3 & \text{si} \quad x\geq -1\end{cases}$. Esta función tiene dos trozos: una rama de parábola a la izquierda de -1 y un trozo de recta a la derecha de -1. En las funciones definidas por trozos, los puntos donde una función “pasa de ser una cosa a ser otra”, reciben el nombre de ***puntos críticos***. En estos puntos hay que estudiar la continuidad estudiando previamente los límites laterales. En nuestro caso el único punto crítico es $x=-1$. Por tanto, ya podemos afirmar que f es continua en $(-\infty,\,-1)\cup(-1,\,+\infty)$. Si además fuese continua en $x=-1$, entonces f sería continua en todo $\mathbb{R}$.
- ✓ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{x+3} & \text{si} \quad x<0\\ x+2 & \text{si} \quad 0\leq x\leq 2\\ \sqrt{\dfrac{1}{x-3}} & \text{si} \quad x>2\end{cases}$. Salvo en los puntos críticos, que son los puntos $x=0$ y $x=2$, esta función sería continua en cada uno de los “trozos donde esté definida”. Vayamos pues por partes:
  - ➢ La función $y=\dfrac{2x^2}{x+3}$ es continua salvo en $x=-3$, punto en el que no está definida. Entonces, como $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+3}$ cuando $x<0$, f será continua en $(-\infty,\,-3)\cup(-3,\,0)$.
  - ➢ La función $y=x+2$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, en particular, lo será también en el intervalo $(0,\,2)$.
  - ➢ Por último, la función $y=\sqrt{\dfrac{1}{x-3}}$, será continua en todos aquellos puntos en los que $\dfrac{1}{x-3}>0$. Esto ocurre solamente cuando $x>3$, luego su dominio de definición es $(3,\,+\infty)$ y en este intervalo f es continua.

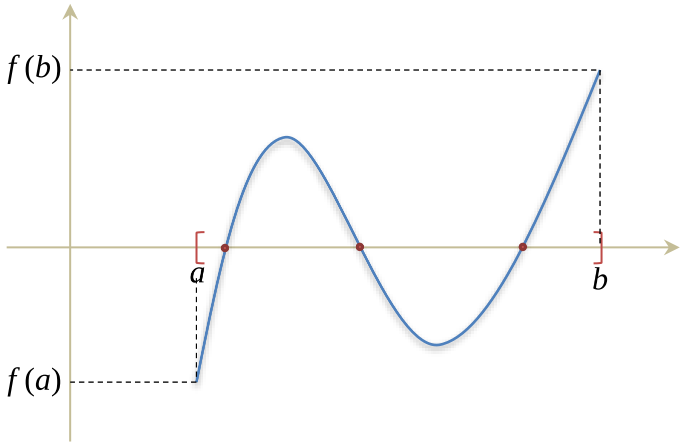
  Resumiendo, f es continua en $(-\infty,\,-3)\cup(-3,\,0)\cup(0,\,2)\cup(3,\,+\infty)$. Para saber si es continua en $x=0$ y en $x=2$ habremos de estudiar los límites laterales en estos puntos (es fácil ver que no es continua en ninguno).

El teorema de Bolzano

Es natural pensar que si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y la imagen en los extremos de este intervalo es de distinto signo, entonces la gráfica de f cortará al eje X. Esta idea la vamos a formalizar en un teorema.

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



En la figura de la derecha podemos visualizar el teorema. Obsérvese que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo. Como f es continua, al trazar su gráfica, ésta tiene que cortar necesariamente al eje X. Los puntitos marcados en dicho eje son los puntos c cuya existencia afirma el teorema (por cierto, el punto c no tiene porqué ser único, pudiendo haber varios puntos donde la gráfica corte el eje X).

Veamos un ejemplo práctico del uso del teorema de Bolzano.

Consideremos la función $f(x) = -xe^x + 1$. El dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$. Por tanto, es continua en todo $\mathbb{R}$ y, en particular, lo será en cualquier intervalo cerrado. Si la imagen de un par de valores reales tiene distinto signo, entonces en ese intervalo habrá un cero. Probemos con dos valores reales sencillos: 0 y 1. $f(0) = -0 \cdot e^0 + 1 = 1 > 0$, $f(1) = -1 \cdot e^1 + 1 = -e + 1 \cong -1,72 < 0$. Según la tesis del teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, tal que $-ce^c + 1 = 0$.

La utilidad del teorema de Bolzano radica en que permite aproximar soluciones de ecuaciones que no son fáciles de resolver. Si nos piden resolver la ecuación $-xe^x + 1 = 0$, tendremos muchas dificultades con los instrumentos matemáticos que hasta ahora tenemos a nuestra disposición. Sin embargo, hemos sido capaces, usando el teorema de Bolzano, de demostrar que tal ecuación tiene al menos una solución y que ésta se encuentra entre 0 y 1. Y no es poco. ¿Podríamos acotar más la solución? La respuesta es afirmativa. Puesto que nuestra solución está entre 0 y 1, debe de estar o bien entre 0 y 0,5, o bien entre 0,5 y 1. Hallemos la imagen de 0,5: $f(0,5) = 0,5e^{0.5} + 1 \cong 0,176 > 0$

Haciendo uso otra vez del teorema de Bolzano, podemos afirmar que la solución de nuestra ecuación se encuentra en el intervalo $(1/2, 1)$. Vamos a tomar un valor entre 0,5 y 1, y volvamos a hallar la imagen de ese valor. Por ejemplo $f(0,6) = -0,6 \cdot e^{0,6} + 1 \cong -0,09 < 0$. Otra vez el teorema de Bolzano permite afirmar que una solución de la ecuación $-xe^x + 1 = 0$ se encuentra en el intervalo $(0,5\ ,\ 0,6)$. Así podríamos continuar hasta acotar la solución tanto como deseáramos. De hecho, la solución de la ecuación es, aproximadamente, $x = 0,5671432986$. A las soluciones de una ecuación también se les llama ceros de la ecuación, con lo que al teorema de Bolzano a veces también se le conoce como teorema de los ceros de Bolzano.

Se puede comprobar sin dificultad (¡inténtalo!) que $\lim_{x \to -\infty} \left(-xe^x + 1\right) = 1$ y que $\lim_{x \to +\infty} \left(-xe^x + 1\right) = -\infty$. Esto, al ser f continua en todo $\mathbb{R}$, ya nos informa de que la gráfica de la función debe cortar en algún punto al eje X.

Finalmente, nos podemos preguntar por el número de soluciones de la ecuación. La respuesta a esta pregunta la obtendremos cuando estudiemos la derivada de una función y las propiedades de las funciones derivables.

Consecuencias del teorema de Bolzano

Teorema de los valores intermedios

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$. Es decir, cualquiera que sea el número k comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Usando el teorema de Bolzano, la demostración de este teorema no es difícil (¿te atreverías a demostrarlo?). Otra consecuencia inmediata y también fácil de demostrar, es la siguiente proposición.

Proposición

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ con $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

Veamos un ejemplo de aplicación del teorema de los valores intermedios.

Consideremos la función $f(x) = (1 - x^2)\cos \pi x$. Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser combinación o composición de funciones continuas en todo $\mathbb{R}$. Por tanto, también lo será en cualquier intervalo cerrado contenido en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, puesto que $f(1) = (1 - 1^2)\cos(\pi \cdot 1) = 0$ y $f(2) = (1 - 2^2)\cos(\pi \cdot 2) = -3 \cdot 1 = -3$, el teorema de los valores intermedios nos asegura de que la función toma todos los valores comprendidos entre $f(1) = 0$ y $f(2) = -3$. Es decir, existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = k$ donde k es cualquier número comprendido entre 0 y -3.

Una última consecuencia del teorema de Bolzano es el teorema de Weierstrass, que nos da información sobre el máximo y el mínimo absolutos de una función en un intervalo cerrado. Recordemos que un número real $s \in [a, b]$ es un ***máximo absoluto*** de f en $[a, b]$ si $f(x) \leq f(s)$, sea quien sea $x \in [a, b]$. Análogamente, un número real $t \in [a, b]$ es un ***mínimo absoluto*** de f en $[a, b]$ si $f(t) \leq f(x)$, sea quien sea $x \in [a, b]$.

Teorema de Weierstrass

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo. Es decir, existen sendos números, s y t, del intervalo $[a, b]$ para los cuales se cumple que $f(t) \leq f(x) \leq f(s)$, sea quien sea $x \in [a, b]$. Si llamamos $M = f(s)$ y $m = f(t)$, entonces $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a, b]$.

El teorema de Weierstrass viene a decir que todos los valores de $f(x)$ están comprendidos, naturalmente, entre m y M, que son las imágenes, respectivamente, del mínimo absoluto y del máximo absoluto.

Como ejemplo, consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$. Como el denominador no se anula tenemos $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$. Nos podríamos preguntar, por ejemplo, por el máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$. Es fácil darse cuenta de que $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2} \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pero como $f(0) = 0$, entonces el mínimo absoluto es $x = 0$, y $m = 0$.

Supongamos ahora existe $x \in [-1, 1]$ tal que $\dfrac{x^2}{1 + x^2} > \dfrac{1}{2}$. Entonces $2x^2 > 1 + x^2 \Rightarrow x^2 > 1$, lo cual es imposible pues $-1 \leq x \leq 1$. Entonces $f(x) \leq 1/2$, para todo $x \in [-1, 1]$. Como $f(1) = 1/2$, entonces el máximo absoluto es $x = 1$ y $M = 1/2$. Así pues, podemos escribir $f([-1, 1]) = [0, 1/2]$ o, lo que es lo mismo, $\operatorname{Im} f = [0, 1/2]$.